LES

PROBLÈMES DES ISOPÉRIMÈTRES

ET DES ISÉPIPHANES

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LES PROBLÈMES DES ISOPÉRIMÈTRES ET DES ISÉPIPHANES

PAR

T. BONNESEN
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE COPENHAGUE.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1929

PRÉFACE

Je suis heureux de remercier ici M. Émile Borel de l'honneur qu'il m'a fait en accueillant cet Ouvrage dans sa Collection si appréciée.

Pour la rédaction finale de ce livre, j'ai eu l'heureuse fortune d'avoir la collaboration de M. Jean Favard, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble. Je remercie vivement M. Favard de la peine qu'il a prise, de l'intérêt et de tous les soins qu'il a portés à ce livre.

C'est aussi un grand plaisir pour moi que de voir mon livre publié par les soins de la maison Gauthier-Villars qui a résolu depuis longtemps le problème de la présentation optima des Mathématiques.

Le livre se termine par une courte bibliographie qui ne prétend pas être complète, mais qui renferme, je l'espère, les Ouvrages les plus importants sur le sujet. Dans le texte, un nombre entre crochets après le nom d'un auteur indique le numéro d'un Mémoire dans la bibliographie.

Copenhague, le 12 octobre 1928.

T. Bonnesen.

LES
PROBLÈMES DES ISOPÉRIMÈTRES
ET
DES ISÉPIPHANES

INTRODUCTION.

Dans ce Livre nous traiterons l'ancien problème des isopérimètres : trouver parmi toutes les figures planes à périmètre donné celle qui a la plus grande aire et le problème analogue dans l'espace : déterminer parmi les corps isépiphaniques (les corps à superficie donnée), celui qui a le plus grand volume. Il est bien connu que ce sont respectivement le cercle et la sphère qui fournissent les solutions de ces problèmes. Et ces propriétés du cercle et de la sphère sont tellement intuitives que, pour l'homme de bon sens, il paraît superflu d'en donner des démonstrations. Pour les géomètres au contraire la démonstration exacte des théorèmes en question a présenté des difficultés assez grandes.

Rappelons pour commencer les belles recherches de Jacob Steiner : ce sont des constructions élémentaires qui permettent de construire, à partir d'une figure non circulaire, soit une figure du même périmètre mais d'aire plus grande, soit une figure de même aire mais de périmètre plus petit, tandis que et l'aire et le périmètre du cercle restent inaltérés par ces constructions. Steiner en conclut que le théorème pour le cercle est démontré.

Mais on voit de suite combien le raisonnement de Steiner est dépourvu de rigueur. Soient en effet L le périmètre et S l'aire de la figure, le théorème en question peut être exprimé par l'inégalité

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 0$$

où le signe d'égalité n'est valable que pour le cercle. Cette inégalité sera appelée l'inégalité isopérimétrique classique et la quantité

$$D = \frac{L^2}{4\pi} - S$$

sera appelée le déficit isopérimétrique de la figure. Pour le cercle le déficit est égal à zéro et il faut démontrer que pour toute autre figure le déficit est positif. Or, les méthodes de Steiner permettent de construire une figure dont le déficit est plus petit que celui de la figure de départ. Mais on ne peut pas en conclure que le déficit a été positif, ou bien on peut dire que Steiner a tacitement supposé que parmi l'ensemble des figures isopérimétriques, il en existe une qui a l'aire maxima, ce qui n'est pas nécessaire. Dans les recherches classiques du calcul des variations on trouve la même faute, et Weierstrass a comblé cette lacune en donnant le premier des conditions suffisantes.

Pour bien illustrer le défaut du raisonnement de Steiner, M. Perron a donné un exemple très frappant en disant que de la même manière on pourrait démontrer que, parmi les nombres entiers, 1 est le plus grand. En effet on peut indiquer une méthode qui permet d'obtenir, à partir de tout nombre entier autre que 1, un nombre plus grand : il suffit en effet d'une élévation au carré.

Pour surmonter ces difficultés on s'est servi de méthodes diverses. Pour le problème isopérimétrique général du calcul des variations, Weierstrass a, comme l'on sait, indiqué une construction qui, dans certains cas, conduit à des conditions suffisantes. Et c'est précisément par cette construction que H. A. Schwarz a, dans un Mémoire célèbre, donné une solution exacte des problèmes des isopérimètres et des isépiphanes au moins pour une classe de corps assez étendue. Seulement sa démonstration n'est pas très intuitive.

De nos jours on fait souvent usage dans le calcul des variations de la méthode dite directe : elle consiste à construire une série de courbes ou de surfaces extrémante, en démontrant que cette série de courbes ou de surfaces tend vers une courbe ou une surface limite qui fournit par conséquent la solution du problème. C'est par cette méthode que M. Study et M. Carathéodory ont traité le problème des isopérimètres. Partant d'une des méthodes de Steiner, M. Study construit à partir d'une figure convexe donnée une série infinie de figures de même périmètre et d'aires croissantes, figures qui ont des axes de symétrie en nombre croissant à l'infini, et il prouve que cette série de figures tend vers un cercle. C'est dire que le déficit décroît vers zéro. Le déficit de la figure donnée est par conséquent positif. (Les démonstrations de M. Study et de M. Carathéodory sont reproduites dans le volume III des *Questioni* de M. F. Enriques; dans le Chapitre en question par M. O. Chisini, on trouvera des renseignements sur l'histoire du problème.)

Dans son Livre *Kreis und Kugel*, M. W. Blaschke a donné pour le même but un principe de convergence plus général; il a démontré le théorème suivant : « Dans un ensemble infini de corps convexes également bornés, il existe toujours une suite de corps qui tend vers un corps convexe. » Et, à l'aide de ce théorème, il a pu obtenir une démonstration de la propriété isépiphanique de la sphère relativement aux corps convexes.

A l'aide des séries trigonométriques Hurwitz a donné une démonstration analytique de l'inégalité isopérimétrique. La démonstration repose sur le théorème de Parseval, démontré par Hurwitz dans le même Mémoire.

Si ingénieuses que soient ces recherches, plus ou moins simples d'ailleurs, elles ne sont pas élémentaires car elles reposent sur des méthodes de convergence. Pour le théorème relatif au cercle, il n'existe, autant que je sache, qu'une seule démonstration élémentaire, celle de M. Henri Lebesgue qui date de 1914 et qui sera reproduite plus tard. Cependant cette démonstration m'était inconnue à l'époque où j'ai commencé mes propres recherches qui avaient pour but de donner des démonstrations complètement élémentaires.

Vu les difficultés que présente la démonstration de l'inégalité isopérimétrique classique, il est curieux que par des constructions élémentaires on puisse parvenir à une égalité meilleure. Soit F une figure plane convexe — on sait que pour le problème des isopérimètres on peut se borner à ces figures — et soient R le rayon du cercle circonscrit, c'est-à-dire le plus petit cercle qui contient la figure, et r le rayon du cercle inscrit, c'est-à-dire le plus grand cercle contenu dans la figure. Ceci posé on trouve l'inégalité

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq \frac{\pi}{4}(R - r)^2,$$

qui montre que le déficit de F est positif sauf dans le cas où $R = r$, cas où F est un cercle.

Maintenant se pose naturellement la question suivante. Quelles sont les circonstances qui ont permis de parvenir à l'inégalité améliorée? Est-ce que pour le problème isopérimétrique général du calcul des variations, on peut espérer trouver des inégalités analogues? A cette question j'ai donné une réponse dans un Mémoire paru aux *Acta mathematica*. Mais, puisque dans le calcul des variations les circonstances sont toujours assez compliquées, il peut être commode de considérer pour commencer le problème des extrema de deux fonctions de deux variables, ce qui sera fait au Chapitre I de ce Livre.

Soient les fonctions $I(x, y)$ et $K(x, y)$ définies dans un domaine fermé du plan des (x, y). Le problème des extrema liés consiste à trouver le minimum de $I(x, y)$ pour une valeur donnée de $K(x, y)$. On est amené à chercher une fonction $\Phi(K)$ telle que l'inégalité

$$I(x, y) - \Phi[K(x, y)] \geqq 0$$

soit valable dans le domaine donné. Dans certaines circonstances liées à la solution du problème libre associé au problème lié, savoir de minimer la fonction $I(x, y) + \lambda K(x, y)$, on peut même arriver à une égalité améliorée, dans laquelle le second membre zéro est remplacé par une quantité positive en général.

Pour $I(x, y) = f(x) + f(y)$, $K(x, y) = x + y$, avec $f''(x) \geqq 0$ l'inégalité extrémale prend la forme

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqq f\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

C'est cette inégalité extrémale que prend J. L. W. V. Jensen pour définition des fonctions convexes. Dans le Chapitre II, partant aussi d'une condition plus générale, nous donnerons quelques théorèmes sur ces fonctions.

Les fonctions convexes sont nécessaires pour l'étude des figures convexes, d'après Minkowski, étude qui sera exposée au Chapitre III, dans lequel seront introduites de plus quelques notions nécessaires aux recherches suivantes.

Le Chapitre IV traite le problème des isopérimètres dans le plan et sur la sphère. Et si l'on veut se borner à la conception intuitive des figures convexes, on peut étudier ces Chapitres sans connaître les Chapitres I-III.

Le problème des isopérimètres a été abordé par M. Hermann Brunn sous un autre point de vue. Dans sa Thèse on trouve la proposition suivante : « Soit un corps convexe coupé par des plans parallèles. L'aire de la section a un maximum qui est atteint ou bien par une section seule, ou bien par une série de sections qui forment un cylindre. » Et il a aussi indiqué la validité du théorème analogue pour les corps à n dimensions. Soient maintenant F_1 et F_2 deux figures convexes situées dans deux plans parallèles et considérons en l'enveloppant, c'est-à-dire le plus petit corps convexe qui contient F_1 et F_2. L'aire d'une section parallèle aux plans de F_1 et F_2 peut être exprimée par les aires S_0 et S_2 de F_1 et F_2 respectivement, et une quantité nouvelle S_1 qui est appelée par Minkowski l'aire mixte de F_1 et F_2. Le théorème de M. Brunn peut alors être exprimé par l'inégalité de Minkowski $S_1^2 \geqq S_0 S_2$, et si F_1 est un cercle, cette inégalité devient précisément l'inégalité isopérimétrique. Cette théorie de Brunn-Minkowski sera exposée dans le Chapitre V d'une manière nouvelle qui permet d'améliorer l'inégalité.

Suivant le point de vue de M. Brunn, Minkowski a fait la recherche d'une série linéaire et de corps convexes définie par deux corps convexes donnés C_1 et C_2, et il a trouvé plusieurs inégalités très remarquables entre les volumes V_0 et V_3 de C_1 et C_2 et « les volumes mixtes » V_1 et V_2 de ces corps. Une de ces inégalités permet de résoudre le problème des isépiphanes relativement aux corps convexes. Dans le Chapitre VI on trouvera, pour le cas de deux polyèdres C_1 et C_2, une explication géométrique des volumes mixtes et des démonstrations des inégalités de Minkowski sous la forme améliorée. Les inégalités ont été l'objet d'une recherche profonde par M. Hilbert.

Ajoutons encore que la démonstration rigoureuse du théorème cité de M. Brunn pour les corps à n dimensions, a été donnée par Minkowski dans sa *Geometrie der Zahlen* dans la dernière feuille qui n'a paru qu'après la mort prématurée du grand géomètre.

Dans le Chapitre VII nous traiterons du problème général des isépiphanes. Après les tentatives de Steiner le théorème en question a été démontré par H. A. Schwarz. A partir d'un corps donné il construit un corps de révolution de même volume et d'une surface plus petite. Et relativement aux corps de révolution il lui est possible de faire usage de la construction de Weierstrass pour le problème isopérimètrique. La démonstration de Schwarz est valable relativement à tous les corps dont les surfaces sont composées de parties qui ont en tout point un plan tangent.

En 1913 M. Leonida Tonelli a étendu la recherche aux surfaces les plus générales par la méthode directe, en adoptant comme définition de la surface celle de Lebesgue. La démonstration de M. Tonelli est essentiellement géométrique. Partant pour commencer d'un polyèdre P, il obtient par la construction de Schwarz un corps de révolution, dont la surface est effectivement plus petite que celle de P. Ce corps de révolution est alors arrondi par rapport à un axe de révolution B, coupant à angle droit l'axe A du premier corps de révolution. Puis le second corps de révolution est arrondi par rapport à A, le troisième par rapport à B, et ainsi de suite. M. Tonelli montre que la surface du corps est effectivement diminuée par chacune de ces constructions, et que la série des corps tend vers la sphère ayant même volume que le polyèdre de départ. Le théorème est ainsi démontré pour un polyèdre, et M. Tonelli étend enfin la démonstration à une surface tout à fait arbitraire, ce qui exige des considérations assez compliquées.

Une troisième démonstration a été donnée en 1917 par Wilhelm Gross qui considère des ensembles fermés arbitraires. Il fait usage de la symétrisation de Steiner et de l'arrondissement de Schwarz et par ces constructions il obtient aussi une série infinie d'ensembles, dont la convergence est démontrée par un artifice assez ingénieux. Pour le cas des corps convexes la méthode est exposée d'une manière très nette par M. W. Blaschke dans son Livre *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I, p. 179. Pour l'ensemble général, la recherche est compliquée. Notons que la mesure de surface introduite par Gross n'est pas identique à celle de Lebesgue.

Dans sa Thèse (Göttingen, 1903), M. I. O. Müller applique les méthodes du Calcul des variations en représentant la surface par des coordonnées ponctuelles polaires, et supposant que le rayon vecteur n'a qu'un point commun avec la surface.

La démonstration que nous donnerons repose sur la construction de Schwartz et sur une construction analogue à celle que nous avons appliquée pour le problème des isopérimètres. On trouve pour les polyèdres une inégalité isépiphanique améliorée qui peut être étendue facilement à des ensembles assez généraux.

Dans le Chapitre VIII nous reviendrons sur la question des inégalités isopérimétriques du Calcul des variations en général, nous indiquerons des cas où elles peuvent être améliorées et nous montrerons que les conditions trouvées sont satisfaites pour le problème restreint des isopérimètres dans le plan.