Le Problème de la Reine Didon
Panorama sur les problèmes de l'Isopérimétrie

par Mark Ashbaugh & Rafael Benguria[1]
traduction de Jacqueline Fleckinger-Pellé

Le sujet de l'isopérimétrie a une longue et riche histoire, à la fois pour son impact sur l'imagination populaire et plus généralement sur celle de la société et aussi pour l'élan qu'il a donné à l'étude de sujets mathématiques variés.

L'isopérimétrie a débuté avec le problème auquel a été confrontée la Reine Didon, qui a du trouver la forme de la frontière à poser au sol (en utilisant des bandes de peau de boeuf) pour encercler une surface d'aire maximale. Si l'on suppose la côte droite, alors la réponse, qui a manifestement été trouvée par la Reine Didon, est de poser ces bandes en forme de demi-cercle.

On trouve le problème de la Reine Didon décrit dans l'exposé imagé qu'en fit Lord Kelvin en 1893 (http://math.arizona.edu/~dido/lord-kelvin1894.html) , avec plusieurs enrichissements du problème original,.

Si l'on prend en compte le fait que la valeur de la terre peut varier, ou que la côte peut être irrégulière, on peut arriver à des problèmes plus complexes. Dans un exposé beaucoup plus récent, Hildebrandt et Tromba, dans leur livre The *Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World* (publié initialement comme *Mathematics and Optimal Forms*), donnent une liste beaucoup plus détaillée des problèmes isopérimétriques et de leur récurrence tout au long de l'histoire. En particulier, il est intéressant de voir combien de cités fortifiées moyenâgeuses ont des remparts à peu près circulaires ou de regarder plus généralement comment l'extension de beaucoup de villes leur donne

[1] avec des contributions de Lennie Friedlander, Evans Harrell, Lotfi Hermi et Frank Morgan.

une forme circulaire.

Du point de vue mathématique, on trouve dans Euclide la démonstration que parmi les rectangles d'un périmètre donné, celui ayant l'aire maximale est le carré. Par ailleurs, plusieurs écrivains de l'antiquité savaient (du moins spéculaient) que les rayons de miel des abeilles, de forme hexagonale, étaient optimaux pour utiliser le moins de matériel pour la construction d'un treillis de cellules, chaque cellule contenant un volume fixe.

L'étude mathématique du problème isopérimétrique et des problèmes associés a commencé réellement avec le développement du calcul, quand des gens comme Newton, Leibniz, les Bernoulli, et d'autres ont établi des méthodes systématiques, basées sur le calcul, pour attaquer ces problèmes d'optimisation, et en quelques années se sont attaqués aux problèmes de calcul de variations (c'est -dire le problème de trouver un chemin optimal ou une forme de courbe parmi une classe de courbes). Par exemple, le problème de brachistochrone a été formulé par Johan Bernoulli et résolu par Newton et les deux frères Bernoulli, Jakob (James) et Johann (John). A la même période, le problème de la forme d'une chaîne suspendue (les caténaires) a été posé et résolu et Newton a considéré la forme d'un projectile présentant le moins de résistance à l'air (détermination de la forme optimale d'un nez de cône de fusée ou de missile), mais sans obtenir de conclusions définitives. D'autres, et parmi eux le Président Thomas Jefferson, ont étudié de telles questions, par exemple la forme optimale du soc de charrue.

Au siècle suivant, avec les premiers développements de calcul par Newton, Leibniz, les frères Bernoulli et d'autres, le « calcul des variations » a atteint un stade relativement avancé, surtout pour le calcul des solutions obtenu par Euler et Lagrange. La solution explicite du problème classique isopérimétrique pouvait ainsi s'en déduire (en utilisant le calcul variationnel avec une contrainte), et de nombreux problèmes pouvaient ainsi être formulés et résolus. Euler et Lagrange ont montré que tous les problèmes de mécanique peuvent être mis dans ce cadre et que de nombreux problèmes de physique et de mathématique peuvent être vus sous le jour de principes variationnels ou d'optimisation (par exemple le principe de Fermat -moindre temps-, ou, plus généralement le principe de moindre action de d'Alembert/Maupertuis, principe pour lequel Euler a donné une formulation définitive). Un siècle plus tard environ, Jacobi et Hamilton ont aussi apporté d'importantes contributions à ce domaine, principalement en mécanique.

Au 19ème siècle, Jakob Steiner s'est attaqué au problème classique de l'isopérimétrie par des méthodes géométriques très suggestives et instructives et qui ont conduit à de nombreux développements ultérieurs. A la même époque, néanmoins Weierstrass a réalisé qu'il pouvait y avoir des problèmes délicats sous-jacents à ces problèmes d'extrema puisque l'extrema n'existe pas toujours. Depuis cette époque, il a été admis que la question d'existence doit être le point de départ dans l'étude de certains problèmes de géométrie et de calcul des variations. Ceci conduit à divers résultats d'existence et d'unicité et à ce que l'on nomme les « méthodes directes du calcul des variations » où l'on essaie de montrer l'existence directement par l'utilisation de suites minimisantes ou maximisantes et par l'utilisation d' outils variés de mathématique (développés par Weierstrass, Schwarz, Poincaré, Hilbert, et leurs contemporains ainsi que des contributeurs plus récents et même actuels).

Au tournant du 20ème siècle a eu lieu un développement très utile: la réalisation par Hurwitz que le problème isopérimétrique classique peut être résolu relativement simplement en termes de séries de Fourier et de quelques unes de leurs propriétés classiques (par exemple l'inégalité de Wirtinger). L'approche par l'analyse de Fourier de l'inégalité isopérimétrique a donné naissance à plusieurs études ultérieures en grande dimension où les harmoniques sphériques remplacent les séries de Fourier. Ce domaine de recherche est joliment exposé, dans une perspective moderne, dans le livre de Groemer, *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics.*

Du point de vue de l'ingénierie et du design, le premier problème vraiment intéressant est peut être celui de trouver « la forme de la colonne la plus robuste » , problème formulé par Lagrange en 1773 (mais non complètement résolu jusqu'à bien plus tard). Au milieu des années 1800, T.Clausen a été capable de faire des progrès sur des points où Lagrange avait trébuché, bien que quelques questions soient restées ouvertes sur ce problème jusqu'à récemment. Voir l'article « Mathematics Intelligencer » de Steve Cox « *The shape of the ideal column* » pour savoir où en est actuellement le problème. Parmi les contributeurs récents les plus pertinents, on trouve J.Keller, I.Tadjbakhsh, M.Overton, and S.Cox. Ce problème est lié au flambement des colonnes, et des problèmes similaires peuvent être considérés pour des poutres horizontales sous diverses charges ainsi que pour des plaques et autres objets de géométrie plus complexes.

Toujours au milieu des années 1800, J.C.B. St Venant a posé la question de trouver la section d'une colonne uniforme qui résisterait le mieux à la torsion (ce qu'on appelle la p « rigidité torsionnelle »). Il a conjecturé que pour une section d'aire donnée, section supposée simplement connexe, (tous les autres paramètres physiques étant fixés), la forme donnant la plus grande rigidité torsionnelle est la forme circulaire. Ce problème a finalement été résolu pa George Pólya en 1948 (confirmant la conjecture de St Venant). Depuis lors on a beaucoup travaillé sur les problèmes de torsion puisqu'il est aussi intéressant de considérer des régions non simplement connexes ainsi que d'autres variations du problème basique.

Quelques années après que St Venant ait étudié le problème de torsion, Lord Rayleigh exposa (et formula des conjectures sur) (1) la forme d'un tambour d'aire fixée qui minimise son ton fondamental (tous les autres paramètres physiques étant fixés), (2) en électricité statique, la forme d'un condensateur parmi des objets simplement connexes de mesure finie qui minimise la capacité pour un volume donné, et (3) la forme d'une plaque encastrée qui, pour une aire donnée, minimise sa fréquence fondamentale. Dans chaque cas, Rayleigh a conjecturé que la forme minimisante est circulaire (ou sphérique dans le cas d'un condensateur en dimension 3).

Comme autres problèmes connexes, il y a la question de la forme qui minimise les pertes de chaleur (problème décrit de façon imagée par Pólya expliquant pourquoi un chat se recroqueville en une boule lors des froides nuits d'hiver) et la forme d'un objet qui minimise son énergie potentielle (gravitationnelle).

Tous les problèmes physiques précédemment mentionnés peuvent être formulés comme problèmes variationnels, beaucoup conduisant directement à des problèmes de valeurs propres. Au début du 20ème siècle, il y eu d'intéressants progrès sur plusieurs de ces problèmes, le plus spectaculaire étant la minimisation du ton fondamental d'un tambour par Faber et Krahn dans des papiers indépendants entre le début et le milieu des années 1920 (la réponse est que l'on doit prendre le tambour circulaire de l'aire donnée). Un peu avant Faber et Krahn, Courant a obtenu une version plus faible du résultat, à savoir que pour un périmètre donné, la méthode pour obtenir le ton fondamental consiste à prendre le tambour circulaire. Plutôt, Poincaré avait fait des progrès sur les problèmes de capacité, la solution complète étant établie par Gabor Szegö en 1930.

En 1950, Pólya et Szegö se sont attaqués à l'étude systématique des travaux antérieurs relatifs aux problèmes physiques d'isopérimétrie pour faire des progrès sur un large front. Leur livre « *Isoperimmetric Inequalities in Mathemaical Physics* », publié à cette époque, est un classique du domaine. Les techniques qu'ils introduisent au début incluent la symétrisation de Steiner et plus généralement les inégalités de réarrangement. Il serait juste de dire que tous les travaux modernes sur les inégalités isopérimétriques pour des quantités physiques reposent sur les travaux de Pólya et Szegö et leurs collaborateurs. Le livre de Pólya et Szegö contient par exemple les solutions des problèmes de Saint Venant et de capacité mentionnés plus haut.

L'intérêt porté par Pólya et Szegö à ce problème a stimulé l'intérêt d'autres chercheurs et a conduit à de nombreux et importants développements dans le domaine. Sans doute faut-il mettre en avant, parmi les premiers contributeurs à ces développements Payne, Hersch et Weinberger qui ont participé à de nombreux progrès et incité leurs étudiants et d'autres chercheurs à travailler sur ce domaine. C'est ainsi que Payne, Pólya et Weinberger ont obtenu au milieu des années 50 des *inégalités universelles* et très simples pour des combinaisons de valeurs propres; ils ont aussi conjecturé la forme précise de certaines. Ceci conduit au problème des inégalités isopérimétriques pour les rapports de valeurs propres, problème qui a joui d'un intérêt considérable (en particulier le rapport λ_2/λ_1) et a finalement été résolu par Ashbaugh et Benguria en 1990..

A la suite de l'avancée significative dans le travail de H.C.Yang au début des années 90, le sujet des inégalités universelles pour les valeurs propres a décollé avec de nombreux articles sur le sujet, le faisant ainsi progresser, et ceci jusqu'à maintenant. Le travail de Yang a permis aux chercheurs de faire des liens fondamentaux entre le domaine des inégalités isopérimétriques universelles et celui du comportement asymptotique des valeurs propres initié par Hermann Weyl aux alentours de 1910. Ce domaine bourgeonne aussi de tous côtés, et les contributeurs récents incluent Q.M.Cheng et H.C. Yang, E.M.Harrell, L.Hermi et J.Stubbe, ainsi que beaucoup d'autres.

Les transformations conformes jouent un rôle important dans les problèmes en 2-dimensions. Szegö les a utilisées pour montrer que le disque minimise, pour des domaines plans simplement connexes d'aire donnée, la quantité $\frac{1}{\mu_1(\Omega)}+\frac{1}{\mu_2(\Omega)}$, les μ_j étant les valeurs propres strictement positives du Laplacien de Neumann. Hersch a montré que la plus petite valeur propre strictement positive de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une 2-sphère ne peut pas excéder celle de l'opérateur pour la métrique de la sphère de même aire. L'observation cruciale est l'invariance conforme du quotient de Rayleigh $\int |\nabla u|^2 dx$ en dimension 2. P.C.Yang et S.T.Yau ont montré que la première valeur propre strictement positive sur une surgace de genre *g* d'aire donnée a une borne supérieure; de plus ils ont donné une borne précise. Dans le cas *g* =2, Jacobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam et Polterovich ont montré que la borne de Yang et Yau est précise, et est atteinte pour une métrique singulière sur une surface de type conforme : $y^2 = x^5 - x$.

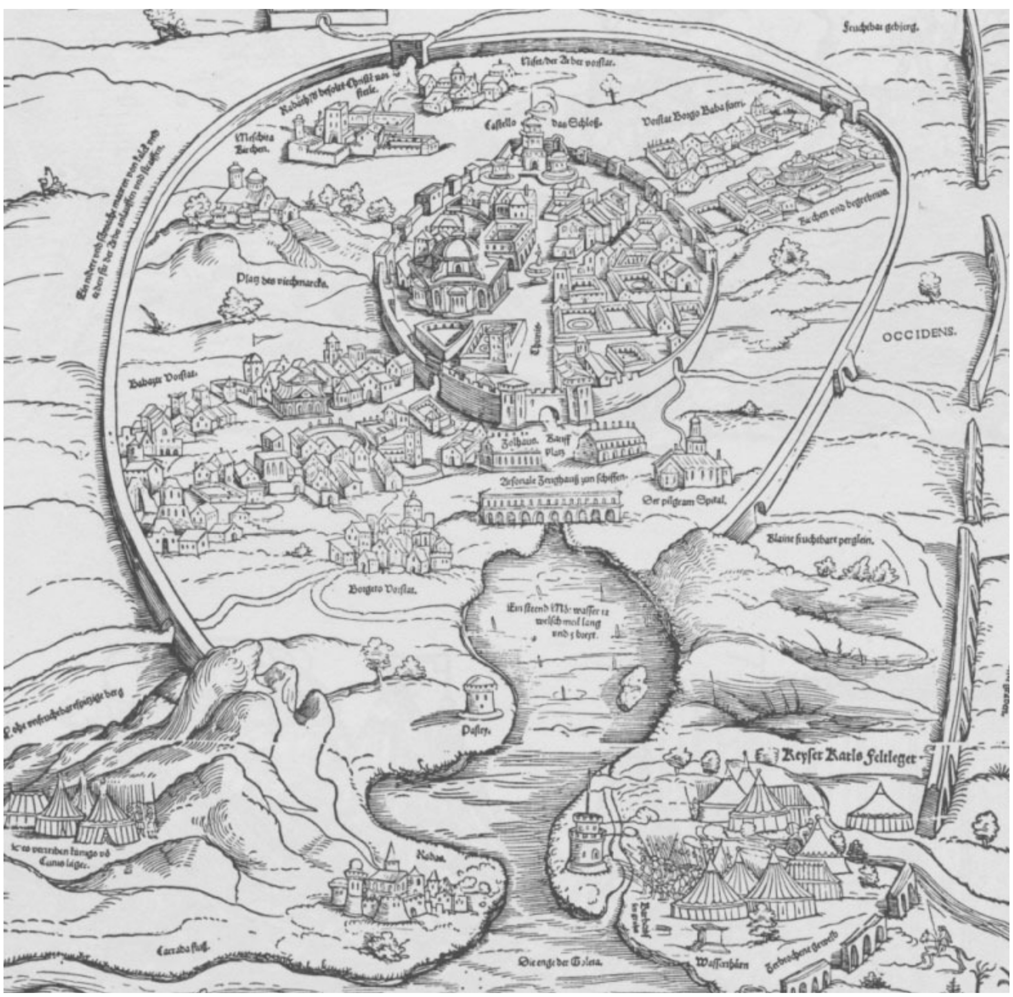
Leur démonstration repose sur des calculs numériques, et il serait intéressant d'avoir une démonstration sans calculs numériques. Dans le cas où la dimension d'une variété est supérieure à 2, Urakawa a montré que, dans la classe des métriques de volume fixé, la première valeur propre positive du Laplacien peut être arbitrairement grande. Néanmoins, pour une classe conforme donnée, elle est bornée et ces bornes supérieures sont bornées inférieurement quand on fait varier les classes conformes (Friedlande, Nadirashvili). Récemment, Colbois, Dryden et El Soufi ont étudié les bornes des valeurs propres du Laplacien pour des métriques G-invariantes au sein d'une classe conforme. Ici G est un groupe de Lie sur une variété.

Manifestement il y a beaucoup d'autres thèmes qui figurent dans l'histoire des problèmes isopérimétriques et des domaines associés et le maximum que l'on puisse faire ici est de mettre en évidence certains faits majeurs. Pour aider à combler les lacunes d'une telle couverture, nous terminons par un bref sommaire de la littérature du domaine, et qui, nous l'espérons, peut être utilisé pour élagir le sujet et donner des idées sur d'autres sujets intéressants d'un domaine quelconque. Pour l'aspect historique, on recommande l'article de Lord Kelvin et le livre D'Hildebrandt et Tromba (tous deux mentionnés plus haut). Pour d'autres informations sur le problème classique d'isopérimétrie, le meilleur ouvrage de référence est le livre de Burago et Zalgaller (« *Geometric Inequalities* »), et l'article de revue en 1978 par Robert Osserman dans le Bulletin de l'American Mathematical Society (« *The Isoperimetric Inequality* »). Parmi les livres et articles intéressants on trouve « *Stories of Maxima and Minima* » par Tikhomirov, « *Mathematics and Plausible Reasoning* » (en 2 volumes) par Pólya; les sections les plus pertinentes de ceci peuvent être obtenues sur le site web de la conférence, http://math.arizona.edu/~dido/polya1954.html, et l'article de Pólya « *Circle, sphere, symmetrization, and some classical physical problems* » ou celui de D.Pedoe « *Circles: A Mathematical View* » et enfin celui de N.Kazarinoff « *Geometric Inequalities* ». Pour les apects de l'isopérimétrie intervenant dans le cadre de la géométrie riemannienne, on peut consulter les livres de Chavel « *Eigenvalues in Riemannian Geometry, Riemannian Geometry: A Modern Introduction* » et de Marcel Berger « *A Panoramic View of Riemannian Geometry*« ainsi que ses livres « *Geometry I* » et « *Geometry II* » pour de nombreuses informations utiles, principalement dans le cadre classique. Le livre de Chavel « *Eigenvalues in Riemannian Geometry* » comporte des sujets qui s'étendent bien aux inégalités isopérimétriques pour des quantités physiques.

Du côté des inégalités isopérimétriques pour des quantités physiques, on peut trouver beaucoup de choses intéressantes dans les travaux de Pólya et Chavel déjà cités. Dans les années 1960 et les suivantes, un rôle clé a été joué par le papier de revue de Payne au SIAM « *Isoperimetric*

Inequalities and their Applications ». Cet article fournit les fondements et la formulation de nombreux problèmes isopérimétriques de la physique (ainsi que leur formulation mathématique) et il liste une variété de problèmes ouverts et de conjectures. En 1991 Payne a actualisé ses commentaires sur nombre de ces problèmes dans sa contribution « *Some comments on the past fifty years of isoperimetric inequalities* » dans le livre « *Inequalities: Fifty years on from Hardy, Littlewood and Pólya* » édité par W.N.Everitt. Après ça sont parus, dans la première moitié des années 1980, les livres de C.Bandle (« *Isoperimetric Inequalities and Applications«*), de R.Sperb (« *Maximum Principles and Their Applications* »), and B.Kawohl (« *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE* ») , et, plus récemment, les livres de D.Bucur et G.Buttazo (« *Variational Methods in Shape Optimization Problems* »), A.Henrot (« *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators* ») et S.Kesavan (« *Symmetrisation annd Applications* »).

Finalement, mentionnons l'excellent livre de E.Lieb et M.Loss, « Analysis », 2ème édition, qui couvre un large domaine dans le domaine des symétrisations et réarrangements dans le contexte des inégalités classiques de l'analyse et de la physique mathématique, ainsi que bien d'autres choses. Le livre couvre en particulier les problèmes de minimisation de la capacité et de l'énergie potentielle gravitationnelle et a un commentaire complet sur les inégalités de Lieb et Thirring et leur relation avec la stabilité de la matière.



Tunis et ses environs, suite à la prise par Charles Quint (le 31 août 1535).